

# Krzywe Mandelbrota

*Izabella Foltynowicz*  
Uniwersytet im. A. Mickiewicza w  
Poznaniu  
*iza@rovib.amu.edu.pl*

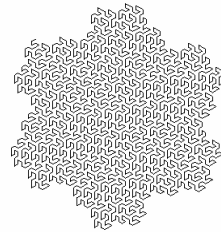
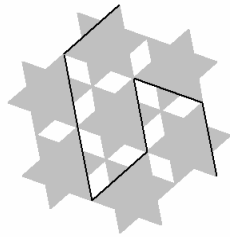
*Andrzej Walat*  
Ośrodek Edukacji Informatycznej i  
Zastosowań Komputerów w Warszawie  
*andrzej@oeiizk.waw.pl*

Sto lat temu szwedzki matematyk Helge von Koch opublikował w czasopiśmie *Arkiv för Matematik* dwie prace, w których opisał konstrukcję geometryczną nazwaną później krzywą Kocha. Istnieją co najmniej dwa powody dla których warto się tą krzywą interesować. Pierwszy powód jest oczywisty. Krzywa Kocha jest klasycznym przykładem krzywej fraktalnej i jest samopodobna w matematycznie czystej postaci. I chociaż możliwe są różne modyfikacje tej krzywej, to ona właśnie wyróżnia się spośród nich wszystkimi wyjątkowymi własnościami. Drugim powodem są niezwykle ciekawe krzywe fraktalne wypełniające obszar płata Kocha, zwane przez nas dalej krzywymi Mandelbrota, ponieważ właśnie Benoit Mandelbrot zainspirowany własnościami krzywej Kocha zaproponował konstrukcje tych krzywych [1]. W naszej pracy najpierw skoncentrowaliśmy się na stworzeniu możliwie najprostszych procedur rekurencyjnych kreślących te krzywe. Było dla nas od początku oczywiste, że procedury te będą miały najprostszą postać, jeśli posłużymy się grafiką z układem odniesienia lokalnym, czyli wędrującym z pisakiem, a nie globalnym układem współrzędnych kartezjańskich na płaszczyźnie. Zupełnie naturalnym wyborem było więc Logo. W literaturze podkreśla się walory grafiki żółwia w odniesieniu do geometrii fraktalnej, rzadko natomiast prezentuje się programy napisane w tym języku [2]. Logo jest idealnym narzędziem do badania rekurencji. A bez dobrego zrozumienia rekurencji trudno pojąć współczesne metody numeryczne, algorytmy i struktury danych.

Przygotowując procedury rekurencyjne kreślące krzywe Mandelbrota, podobnie jak to się dzieje w przypadku innych obiektów geometrii fraktalnej, uporać się należy z rozwiązaniem wielu klasycznych (szkolnych) zadań geometrycznych. Stąd geometria fraktalna zaczyna nam się objawiać jako naturalna kontynuacja geometrii tradycyjnej. I tak jest w istocie, ponieważ czasy w których fraktale jawiły się jako dziwne monstra, nie mieszczące się w zastanym gmachu matematyki należą już do przeszłości. Jednocześnie cały czas mamy świadomość, jak wiele zagadek i nie odkrytych prawd matematycznych kryją te fantastyczne krzywe. Uczymy się zauważać coraz to nowe szczegóły, analogie.

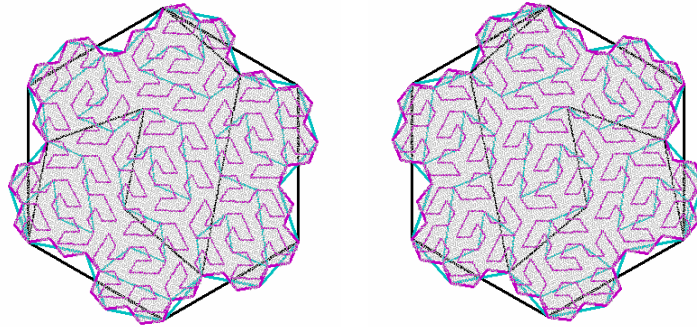
Procedury rekurencyjne prowadzące do krzywych Madelbrota zawierają 7, 11 a nawet 13 odwołań rekurencyjnych, przy czym rekurencja jest krzyżowa pomiędzy dwoma, a nawet czterema procedurami. Istnieje więc naturalna potrzeba zwięzłego i precyzyjnego zapisania schematów rekursji. Jedną z możliwości stwarza teoria L-systemów Lindenmayera [3, 4, 5]. Jeden z autorów na licznych przykładach pokazał jak to można zrobić [6, 7], w tym również dla jednej z krzywych Mandelbrota [8]. Teraz jednak drugi z autorów zaproponował rysunki, które prezentują jak te krzywe rozpinają płatki Kocha wypełniające (całkowicie lub nie) obszar większego płatka Kocha i są to rysunki z gatunku tych, które zastępują wiele słów. Dlatego zamieścimy je w tym krótkim streszczeniu.

Jako pierwszy przykład przedstawiamy odmianę płatka Kocha zwaną wyspą Gospera (G), która z kolei może być wypełniona nieprzecinającą się krzywą zwaną krzywą Peano-Gospera (PG). Najpierw pokazujemy wspomniany wyżej rysunek dla pierwszego stopnia krzywej PG, krzywą PG stopnia czwartego oraz kody podstawowych procedur. Następnie na dwóch rysunkach pokazujemy efekt finalny dla krzywej G dla stopnia 0, 1 i 2 oraz krzywej PG dla stopni 1, 2, 3 i 5. Oba rysunki różnią się symetrią. Można powiedzieć, że płatki na jednym z nich są „prawoskrętne” a na drugim – „lewoskrętne”.



<pre> to PGosperL :s :a if :s = 0 [fd :a stop] rt 19.1 PGosperL :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 60 PGosperR :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 120 PGosperR :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) rt 60 PGosperL :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) rt 120 PGosperL :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) PGosperL :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) rt 60 PGosperR :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 60 lt 19.1 end </pre>	<pre> to PGosperR :s :a if :s = 0 [fd :a stop] rt 19.1 rt 60 PGosperL :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 60 PGosperR :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) PGosperR :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 120 PGosperR :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 60 PGosperL :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) rt 120 PGosperL :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) rt 60 PGosperR :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 19.1 end </pre>
---	---

<pre> to coast :s :a if :s = 0 [fd :a stop] rt 19.1 coast :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 60 coast :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) rt 60 coast :s - 1 :a / ( sqrt 7 ) lt 19.1 end </pre>	<pre> to Gosper :s :a cs ht [repeat 6 [coast :s :a / sqrt 3 lt 60] end </pre>
---	---



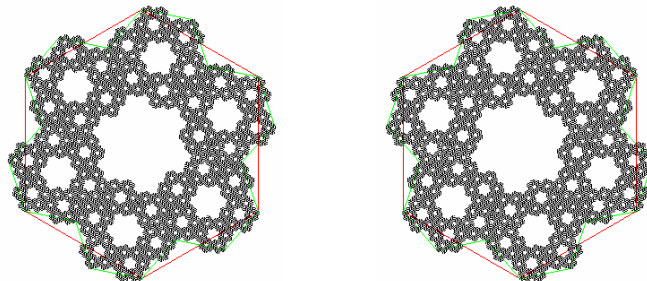
Interesujące, naszym zdaniem, jest porównanie powyższych rezultatów z obrazkami jakie otrzymaliśmy przy pomocy zupełnie innego programu, a mianowicie:

```

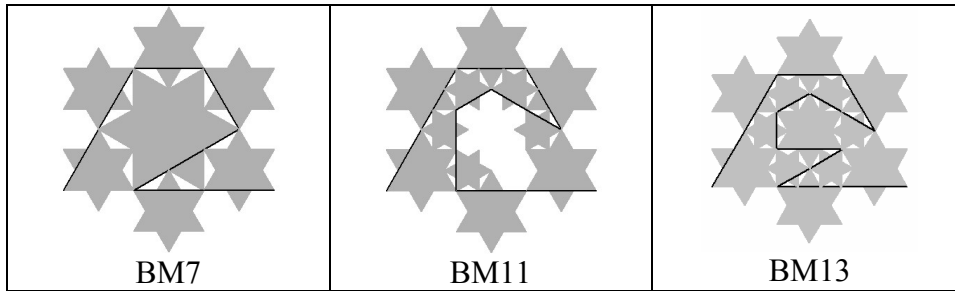
to shex :n :a :k
if :n = 0 [dot stop]
repeat 6 [lt :k pd shex :n - 1 :a / sqrt 7 :k rt :k pu fd :a rt 60]
end

```

shex 6 150 19.1:



Dla pozostałych krzywych Mandelbrota przedstawiamy tylko rysunki i kody procedur dla pierwszej z nich [9]:

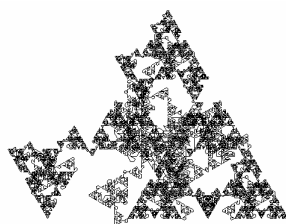


<pre> to L :s :a :i if :s = 0 [setpc 1 fd :a stop] lt 60 * :i L :s - 1 :a / 3 (- :i) R :s - 1 :a / 3 (- :i) rt 60 * :i R :s - 1 :a / 3 (- :i) rt 60 * :i R :s - 1 :a / 3 (- :i) rt 90 * :i R :s - 1 :a * (sqrt 3) / 3 :i lt 150 * :i L :s - 1 :a / 3 (- :i) R :s - 1 :a / 3 (- :i) end </pre>	<pre> to R :s :a :i ;i = 1 or -1 if :s = 0 [setpc 3 fd :a stop] L :s - 1 :a / 3 (- :i) R :s - 1 :a / 3 (- :i) rt 150 * :i L :s - 1 :a * (sqrt 3) / 3 :i lt 90 * :i L :s - 1 :a / 3 (- :i) lt 60 * :i L :s - 1 :a / 3 (- :i) lt 60 * :i L :s - 1 :a / 3 (- :i) R :s - 1 :a / 3 (- :i) rt 60 * :i end </pre>
---	--

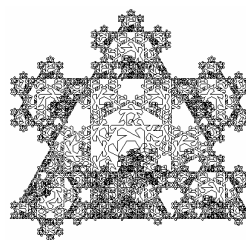
Oprócz wyżej wymienionych czterech odmian krzywych nie przecinających się wypełniających obszar o fraktalnych brzegach proponujemy również inne krzywe o podobnych własnościach. Przede wszystkim jednak pragniemy zaprezentować wariacje na temat każdej z nich, polegające z jednej strony na tym, że generujemy wszystkie możliwe odmiany krzywych wypełniających obszar wyspy w ten sam sposób, a z drugiej – wszystkie możliwe odmiany krzywych wynikające z uogólnionego schematu rekursji. Nie ma tutaj miejsca na opisanie sposobu w jaki to zostało zrobione. Powiemy więc tylko, że schemat rekursji został zakodowany z wykorzystaniem struktury danych właściwej dla Logo, a mianowicie listy. Poniższa tabelka prezentuje podstawowe dane mutantów trzech krzywych Mandelbrota:

Nazwa krzywej	GEN bin	GEN dec	Liczba mutantów	Całkowita liczba mutantów
BM7	1000110	70	$2^7 = 128$	$(2^7)^2 = 16384$
BM11	10000111010	1082	$2^{11} = 2048$	$(2^{11})^2 = 4194304$
BM13	1000011100110	4326	$2^{13} = 8192$	$(2^{13})^2 = 67108864$

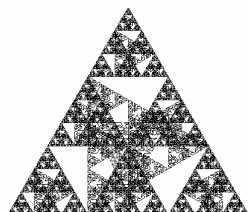
Procedura generująca te wariacje ma trzy parametry: dwie liczby kodujące uogólniony schemat rekursji i stopień krzywej. Dla przykładu prezentujemy jedynie cztery przykłady krzywych z rodziny pełnej grupy mutantów krzywej BM7:



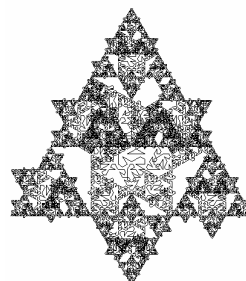
74 44 5



115 68 5



89 108 5



89 108 5

#### Literatura:

1. Benoit B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman & Company, San Francisco 1983.
2. Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jurgens, Dietmar Saupe, *Granice chaosu. Fraktale*, WN PWN 1995.
3. Przemysław Prusinkiewicz, James Hanan, *Lindenmayer Systems, Fractals and Plants*, Lecture Notes in Biomathematics, **79**, 1989.
4. Przemysław Prusinkiewicz, Aristid Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, New York 1990.
5. Przemysław Prusinkiewicz and Mark Hammel, *Language-Restricted Iterated Function Systems, Koch Costructions and L-systems*, [www.cpsc.ucalgary.ca](http://www.cpsc.ucalgary.ca)
6. Izabella Foltynowicz, *L-systemy w Logo Komeniusz*, Materiały Konferencji „Informatyka w Szkole, XVIII”, Toruń 2002.
7. Izabella Foltynowicz, *Od geometrii tradycyjnej do geometrii fraktalnej oraz Tańczący tygrys i ukryty smok Sierpińskiego*, Materiały Konferencji „Informatyka w Szkole, XX”, Wrocław 2004.
8. Izabella Foltynowicz, *The Algorithmic Beauty of Recursive Structures*, Materiały konferencji EuroLogo, Porto 2003.
9. Maciej Rogoziński, Andrzej Walat, *Fraktale*, Biblioteczka Metodyczna nr 13 Komputer w Szkole, Jelenia Góra 1991