

Kilka zadań grafowych na lekcje informatyki w szkole

Warsztaty

Graf, to obiekt graficzny, złożony z linii (jak na przykład wykres funkcji) lub z punktów i linii (jak na przykład schemat dróg, łączących wybrany zbiór punktów-miejscowości). Te obiekty są bardzo popularne i użyteczne w wielu sytuacjach, w których przedstawiamy zależności i powiązania między wyróżnionymi elementami.

Dlaczego warto mówić o grafach?

- ◆ Grafy są wszędzie - to połączenie kropek kreskami; na wielu przedmiotach pojawiają się jako wizualizacja zależności, powiązań, relacji, związków, ...
- ◆ Grafy są bardzo pomocne - jako diagramy zależności, mapy drogowe, schematy układów elektrycznych i elektronicznych
- ◆ Grafy są ważne - służą do analizy powiązań, które reprezentują,
- ◆ Grafy są obiektami matematycznymi - zapewniają ścisłość i logiczność rozważań
- ◆ Grafy są fajne - można mieć wiele uciechy zajmując się nimi

Cel lekcji na tematy grafowe - użycie ciekawych i bardzo prostych zadań, których rozwiązanie może być znalezione w sposób elementarny i intuicyjny. Często prostotę rozwiązań osiąga się dzięki temu, że na grafach "wszystko widać", a trudności pojawiają się dopiero wtedy, gdy ma to "zobaczyć" komputer.

W informatyce, z jednej strony grafy są przykładem rozbudowanych, nieliniowych struktur danych, a drugiej - mogą być wykorzystane do wyprowadzenia i zilustrowania wielu technik algorytmicznych, do zainicjowania i pogłębienia myślenia algorytmicznego.

Przykłady zadań i tematów (w ich rozwiązaniach są przydatne grafy i własności grafów):

1. Ciągi stopni wierzchołków grafu. Suma stopni jest parzysta - wynika to z faktu, że ... każdy kij (krawędź) ma dwa końce. Stąd łatwo zauważyć bardzo ważny fakt: w każdym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta. Przy tej okazji można opowiedzieć, co to jest **zasada szufladkowa** i pokazać, że każdy graf zawiera przynajmniej dwa wierzchołki, które mają taką samą liczbę sąsiadów. Bardzo proste jest porządkowanie ciągu stopni wierzchołków grafu $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ - Podaj algorytm porządkowania ciągu d działający w czasie $O(n)$.

2. Zagadka Eulera o mostach królewieckich. Kiedy w grafie można znaleźć drogę zamkniętą, która zawiera każdą krawędź dokładnie raz? Zastosowania:

- ◆ Figury uniksuralne, czyli jednobieżne, czyli dające się narysować bez odrywania ołówka od kartki.
- ◆ Planowanie drogi zwiedzania galerii.

3. Kolorowanie. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary, które mają wspólną granicę (odcinek „dłuższy” od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem. Inne zadania tego rodzaju:

- ◆ pomaluj dwoma kolorami obszary, na które dzieli płaszczyznę przecinająca się krzywa zamknięta;
- ◆ pomaluj dwoma kolorami obszary, na które dzieli płaszczyznę porzrzucone na płaszczyźnie prostokąty;
- ◆ jeśli trzy obszary spotykają się w jednym punkcie, to nie można pomalować ich dwoma kolorami - zaproponuj sposób malowania takich obszarów możliwie najmniejszą liczbą kolorów. [1]

Uzasadnienie dla zadań kolorowania: są one związane z malowaniem mapy. Każdą mapę można pomalować 4 kolorami - ten fakt został udowodniony ... przez komputer i nie ma dzisiaj innego dowodu.

4. Obchodzenie grafu:

4.1. Czy ruchem konika szachowego można obejść wszystkie 5 i wrócić do punktu startu? A bez powracania do punktu startu?

4.2. Kostkę (sześciian) żółtego sera podzielono na dwadzieścia siedem jednakowych sześcianików. Do sera dorwała się mysz i zjada go sześcianikami przechodząc od jednego do drugiego tylko wtedy, gdy mają wspólną ścianę.

1. Czy uda się jej zjeść cały ser? Odpowiedź uzasadnij.
2. Odpowiedz na to samo pytanie zadane dla kostki z usuniętym najbardziej wewnętrznym sześcianikiem.

4.3. graf skierowany, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona dokładnie jednym łukiem, nazywa się *turniejem*. Uzasadnij, że każdy turniej zawiera drogę Hamiltona, czyli drogę, która przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz. .

5. Drzewa:

- ◆ każde drzewo ma o jedną krawędź mniej niż ma wierzchołków
- ◆ drzewa wyrażen, drzewa algorytmów [2]
- ◆ drzewa Hofmanna - krótkie kody [3]
- ◆ najkrótsze drzewa - minimalne sieci połączeń - algorytm zachłanny [1]

6. Wychodzenie z labiryntu - strategie poszukiwania wyjścia: w głąb, wszerek, „z ręką na ścianie”, jako strategie przeszukiwania grafu. [2]

7. Najkrótsze drogi - algorytm zachłanny.

8. Grafy na płaszczyźnie, na sferze, w przestrzeni i na innych powierzchniach. Zagadka o trzech zwaśnionych sąsiadach i trzech studniach. Wzór wielościennej Eulera $v - e + f = 2$. Wnioski dla grafów na płaszczyźnie

9. Dobór w pary - skojarzenia, problemy małżeństw, grafy dwudzielne.

10. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D . Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie. (Patrz zadanie znajdowania idola w [2]).

Oprogramowanie

Podczas warsztatów wykorzystany zostanie program edukacyjny **Graf**, ilustrujący sposoby reprezentowania grafów w komputerze oraz działanie wybranych algorytmów.

Wiele apletów w języku Java można znaleźć w sieci, np.:

<http://eos.uom.gr/~thanasis/IIIE.htm>

<http://faculty.uwstout.edu/wuming/Samples/SelectInputMethod.html>

Dalsze materiały

1. Sysło M.M., Deo N., Kowalik J.S., *Algorytmy optymalizacji dyskretnej w języku Pascal*, WN PWN, Warszawa 1997.
2. Sysło M.M., *Algorytmy*, WSiP, Warszawa 1997, 2002.
3. Sysło M.M., *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, WSiP, Warszawa 1998.
4. <http://www.wsip.com.pl/algorytmika/>.
5. Oprogramowanie edukacyjne: **Graf**, programy w języku Pascal (własne i z [1])
6. Różne diagramy i przybory do „animacji” algorytmów i pojęć.
7. Zasoby w Internecie.